

Matematikai és Informatikai Intézet

Problémamegoldást segítő matematikai szoftver gimnáziumi alkalmazása (feladatgyűjtemény)

Készítette
Négyesi Péter
informatika-matematika
osztatlan tanárképzés

Témavezető
Oláhné Dr. Téglási Ilona
egyetemi adjunktus
Szakács Tamás
egyetemi tanársegéd

Eger, 2019

Tartalomjegyzék

1. Feladatok **4**

1.1. Euklideszi algoritmus 4

1.2. Kétváltozós lineáris diofantoszi egyenlet 4

1.3. Pitagoraszi számhármasok 5

1.4. Szám összes osztója 5

1.5. Tökéletes számok 6

1.6. Szám prímtényezős felbontása 6

2. Megoldások **7**

2.1. Az 1.1 témakör feladatainak megoldása 7

2.2. Az 1.2 témakör feladatainak megoldása 11

2.3. Az 1.3 témakör feladatainak megoldása 18

2.4. Az 1.4 témakör feladatainak megoldása 22

2.5. Az 1.5 témakör feladatainak megoldása 26

2.6. Az 1.6 témakör feladatainak megoldása 27

Bevezetés

„Az eredményeim régóta megvannak, már csak azt nem tudom, hogyan jussak el hozzájuk.”

(Carl Friedrich Gauss)

Informatikatanár-matematikatanár szakos hallgatóként igyekeztem úgy megválasztani TDK munkám témáját, hogy az mindenképpen kapcsolódjon az Eszterházy Károly Egyetemen eltöltött évek alatt a szívemhez leginkább közel kerülő matematikai ághoz, a számelmélethez, valamint korábbi tanulmányaimhoz híven, a webprogramozáshoz. Ezért is választottam témául egy problémamegoldást segítő matematikai szoftver[1] alkalmazási lehetőségeinek középiskolai bemutatását.

Feladatgyűjteményem JavaScript nyelven megírt webalkalmazásaimra építkezik, melyek a következő számelméleti problémákhoz kapcsolódnak: az euklideszi algoritmus, a kétváltozós lineáris diofantoszi egyenletek megoldása, a pitagoraszi számhármasok, adott szám összes osztójának meghatározása, a tökéletes számok és a prímtényezős felbontás előállítása.

Az első fejezetben a gimnáziumi oktatásban is megjelenő, az egyes webalkalmazásokhoz kapcsolódó feladatok találhatók. A feladatgyűjtemény adhat ötleteket diáknak és tanárnak egyaránt, de arra is alkalmas, hogy a diákok önállóan használják, ez utóbbi célt szolgálja a részletesen kidolgozott megoldásokat tartalmazó második fejezet. A feladatok eltérő nehézségűek és különböző irányból közelítik meg az adott témakört.

Bízom benne, hogy mind a gimnazista diákok, mind tanáraik örömüket lelik majd a különböző feladatok megoldásában, és sikerül megmutatni a gyerekeknek a matematika eme szegmensének szépségeit.

[1] A honlapom a https://www.negyesipeter.hu webcímen érhető el.

1. fejezet

Feladatok

1.1. Euklideszi algoritmus

1.1. Feladat. 24 marcipános és 36 zselés szaloncukrot rakunk csomagokba úgy, hogy mindegyik csomagba ugyanannyi legyen mindkét fajta szaloncukorból. Legtöbb hány csomagot készíthetünk? [7] Megoldás

1.2. Feladat. Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Úgy akarják elhelyezni a képeket osztályonként külön-külön, hogy minden sorban ugyanannyi kép legyen. Legfeljebb hány képet tehetnek egy sorba, ha az osztálylétszámok 30 és 25? [8] Megoldás

1.3. Feladat. Egy esküvőn 416 poharat és 224 tányért hordtak ki az asztalokra. Minden ünneplőnek ugyanannyi pohárral és ugyanannyi tányérral terítettek. Hányan lehettek az esküvői vacsorán, ha tudjuk, hogy 30-nál többen fogadták el a meghívást? [8] Megoldás

1.4. Feladat. Hány olyan pozitív számokból alkotott számpár van, amelyben szereplő két számnak az összege 216, a legnagyobb közös osztójuk pedig 24? (A számpárban a számok sorrendje nem számít.) [9] Megoldás

1.5. Feladat. Hány olyan pozitív számokból alkotott számpár van, amelyben szereplő két számnak az összege 256, a legnagyobb közös osztójuk pedig 32? (A számpárban a számok sorrendje számít.) Megoldás

1.2. Kétváltozós lineáris diofantoszi egyenlet

1.6. Feladat. Merlin, a Varázsló, a következő érdekes feladvánnyal örvendeztette meg Arthur királyt: Avalon szigetén 115 és 50 centnek megfelelő ezüst érmékkel lehet csak fizetni. Kerülhet-e egy termék 1100 centbe és hányféleképp fizethető ki? Megoldás

1.7. Feladat. Kamelottól keletre, 8 napi lovaglásra van egy sziget, ahol 14- és 22-fejű hidrák élnek (egy régi tekercs tanúsága szerint összesen 236 fejük van), akik a bölcsesség titkát őrzik. Arthur király elhatározta, hogy a titok nyomába ered és megszerzi azt. Hány hidra él a szigeten? Megoldás

1.8. Feladat. Kamelotban minden évben kiosztják a megmaradt gabonát a népnek. Egy zsák búza 72 kg, egy zsák árpa pedig 56 kg. A város idei terméktöbblete 752 kg gabona. Ebből hány zsák a búza és hány zsák az árpa? Megoldás

1.9. Feladat. Arthur király csatába indult seregével. Merlin, hogy lerövidítse utukat, autókat és motorkerékpárokat varázsolt elő a semmiből. Indulás előtt a történetíró feljegyezte, hogy összesen 302 kerék hagyta el Kamelotot. Hány autóval és hány motorkerékpárral utaztak? Megoldás

1.10. Feladat. Merlin, a Varázsló, egy újabb érdekes feladvánnyal örvendeztette meg Arthur királyt: ha a királyi pincében 120 és 180 literes hordókban tárolják az 1860 liter bort, akkor melyik hordóból mennyi van? Megoldás

1.3. Pitagoraszi számhármasok

1.11. Feladat. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalai cm-ben mérve egész számok és egyik befogója 12 cm? Megoldás

1.12. Feladat. Számítsuk ki a derékszögű háromszög oldalait, ha tudjuk, hogy az oldalak egész számok és a háromszög területe 60 cm^2. Megoldás

1.13. Feladat. A hagyományos tv-készülékek képernyőjének szélesség:magasság aránya 4 : 3. A képernyők méretét az átló hosszával szokás jellemezni. Milyen széles és milyen magas az a képernyő, amelyiknek az átló-hossza 55 cm? [10] Megoldás

1.14. Feladat. Egy rombusz átlóinak aránya 5 : 12, a kerülete 156 cm. Mekkora a rombusz területe? [10] Megoldás

1.15. Feladat. Egy 300 m magas hegyre sífelvonó vezet fel.A felvonó PR drótkötelének hossza $\frac{4}{5}$-szerese a vetületi, vízszintes PQ távolságnak. Milyen hosszú a drótkötél? [10] Megoldás

1.4. Szám összes osztója

1.16. Feladat. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $(n+1)$-nek pedig pontosan három. Hány pozitív osztója van az $n + 2012$ számnak? Megoldás

1.17. Feladat. Egy egész számnak két prímosztója van. Osztóinak száma 6, osztóinak összege 28. Melyik ez a szám? Megoldás

1.18. Feladat. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van, és ezek összege 84? Megoldás

1.19. Feladat. Van-e olyan háromjegyű természetes szám, amelynek 25 pozitív osztója van? Megoldás

1.20. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan p pozitív prímszámot, melyekre a $p^2 + 11$ számnak pontosan 6 pozitív osztója van! Megoldás

1.5. Tökéletes számok

1.21. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az n páros szám pontosan akkor tökéletes, ha $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám! [11] Megoldás

1.22. Feladat. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között? [11] Megoldás

1.23. Feladat. Melyek azok a tökéletes számok, melyek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám? [11] Megoldás

1.24. Feladat. Van-e olyan 6-nál nagyobb tökéletes szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel? [11] Megoldás

1.25. Feladat. Különböző páratlan prímek szorzata lehet-e tökéletes szám? [11] Megoldás

1.6. Szám prímtényezős felbontása

1.26. Feladat. Melyek azok az N pozitív egész számok, amelyeknek prímtényezős felbontásában csak a 2 és a 3 hatványai szerepelnek, és N összes osztójának a száma harmadrésze N^2 osztói számának? Megoldás

1.27. Feladat. Egy téglatest minden élének mérőszáma egész. A téglatest térfogatának, fél felszínének és az egyik csúcsba befutó élek hosszának mérőszámait összeadva 2000-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei? Megoldás

1.28. Feladat. Egy téglatest éleinek mérőszámai egészek. A téglatest térfogatának, fél felszínének, és az egy csúcsból kiinduló élek hosszának mérőszámait összeadva 2014-et kapunk. Mekkorák a téglatest élei? Megoldás

1.29. Feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amivel az 1400–at megszorozva, vagy elosztva négyzetszámot kapunk? Megoldás

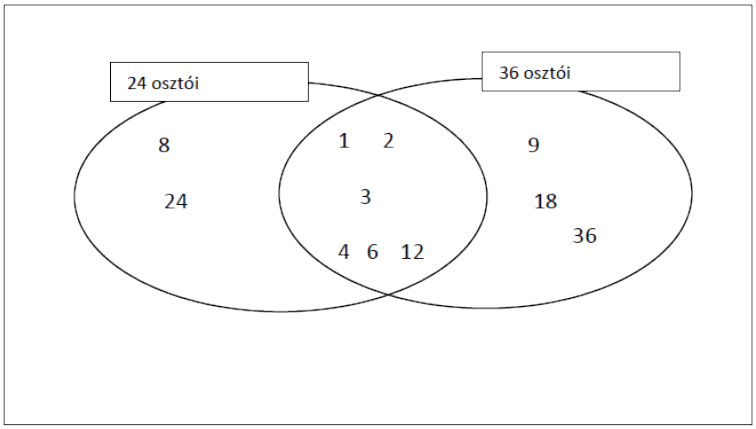
1.30. Feladat. Melyik a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelynek tízszerese négyzetszám, hatszorosa pedig köbszám? Megoldás

2. fejezet

Megoldások

2.1. Az 1.1 témakör feladatainak megoldása

Az 1.1 feladat megoldása.
24 szaloncukrot egyformán szétosztani annyi csomagban lehet, ami osztója a 24-nek. Ugyanez igaz a 36-ra. Mindkét fajtát egyformán annyi csomagban oszthatunk el, ami mindkét számnak osztója, ezek a közös osztók. Az alábbi halmazábráról leolvasható a legnagyobb közös osztó, amely nem más, mint a 12.



1.1. ábra. A 24 és a 36 osztóinak halmazábrája

Tehát legtöbb 12 csomagba oszthatjuk szét egyformán mindkét fajta szaloncukrot.

Most pedig oldjuk meg a feladatot az Euklideszi algoritmus segítségével, melynek lényege, hogy lévén a maradékos osztás maradéka mindig kisebb az osztónál, ezért két szám legnagyobb közös osztójának meghatározása mindig visszavezethető két kisebb szám legnagyobb közös osztójának megkeresésére.
Ehhez hívjuk segítségül a megfelelő webalkalmazást[1]! Írjuk be a két számot az n-hez és m-hez tartozó fehér téglalapokba, majd kattintsunk az „LNKO & LKKT” feliratú nyomógombra!

[1] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/euklideszi-algoritmus/index.html



1.1. kép. A 36 és a 24 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

Az 1.2 feladat megoldása.

Most már az előzőekben megismert Euklideszi algoritmus segítségével oldjuk meg a feladatot, a webalkalmazást pedig csak ellenőrzésre használjuk.

$$\begin{aligned} 30 &= 25 \cdot 1 + 5 \\ 25 &= 5 \cdot 5 + 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$



1.2. kép. A 30 és a 25 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

Jól dolgoztunk, tehát valóban $(30; 25) = 5$, vagyis a megadott osztálylétszámok esetében 5 kép kerülhet egy sorba az iskolai évkönyvben.

Az 1.3 feladat megoldása.

A $416 = 2^5 \cdot 13$ és a $224 = 2^5 \cdot 7$ prímtényezős felbontásokból adódóan a közös osztók:

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$. Vagyis a legnagyobb közös osztó a $2^5 = 32$.
Az előzőekhez hasonlóan most megoldjuk a feladatot az Euklideszi algoritmus segítségével is.

$$\begin{aligned} 416 &= 224 \cdot 1 + 192 \\ 224 &= 192 \cdot 1 + 32 \\ 192 &= 32 \cdot 6 + 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Itt is a $(416; 224) = 32$ megoldás adódott, nagy valószínűséggel jól dolgoztunk, de biztosra megyünk, így leellenőrizzük eredményünk helyességét a webalkalmazás segítségével is.



1.3. kép. A 416 és a 224 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

Tehát most már teljes bizonyossággal kijelenthető, hogy az egyetlen megoldása a feladatnak a 32, hiszen a többi közös osztó 30-nál kisebb, és tudjuk, hogy 30-nál többen fogadták el a meghívást az esküvőre.

Az 1.4 feladat megoldása.

Mivel mindkét szám osztható 24-gyel, így felírhatjuk őket, mint 24 többszöröseit, azaz $a = 24 \cdot k$ és $b = 24 \cdot l$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}^+$. Ezekből adódóan $24k + 24l = 24(k + l) = = 216$, vagyis $k + l = 9$. Most megnézzük, hogy hányféleképpen írható fel a 9 két szám összegeként (a számpárokban a számok sorrendje nem számít): $1 + 8 = 2 + 7 = 3 + + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1$. Tehát 8 eset van.

Például a $k = 2$ és az $l = 7$ esetben $a = 48$ és $b = 168$. Webalkalmazásunk segítségével leellenőrizzük, hogy valóban 24 lesz-e a legnagyobb közös osztó.



1.4. kép. A 168 és a 48 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

A további ellenőrzésekből kiderül, hogy a 8 számpár mindegyike kielégíti az eredeti feltételeket.

Az 1.5 feladat megoldása.

Az előző megoldáshoz szinte teljesen hasonlóan járunk el, annyi különbséggel, hogy itt most számít a számpárokban a számok sorrendje.

Mivel mindkét szám osztható 32-vel, így felírhatjuk őket, mint 32 többszöröseit, azaz $a = 32 \cdot k$ és $b = 32 \cdot l$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}^+$. Ezekből adódóan $32k + 32l = 32(k + l) =$ $= 256$, vagyis $k + l = 8$. Most megnézzük, hogy hányféleképpen írható fel a 8 két szám összegeként: $1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. Tehát itt csak 4 eset van.

Például a $k = 3$ és az $l = 5$ esetben $a = 96$ és $b = 160$. Webalkalmazásunk segítségével leellenőrizzük, hogy valóban 32 lesz-e a legnagyobb közös osztó.



1.5. kép. A 160 és a 96 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

A további ellenőrzésekből kiderül, hogy a 4 számpár mindegyike kielégíti az eredeti feltételeket.

2.2. Az 1.2 témakör feladatainak megoldása

Az 1.6 feladat megoldása.
A feladat szövege alapján az

$$115x + 50y = 1100 \tag{2.3}$$

egyenletet kell megoldanunk, amely csak akkor oldható meg, ha $(115; 50) \mid 1100$, vagyis ha a 115 és az 50 számok legnagyobb közös osztója az 1100 osztója.
Alkalmazva az Euklideszi algoritmust kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 115 &= 50 \cdot 2 + 15 \\ 50 &= 15 \cdot 3 + 5 \\ 15 &= 5 \cdot 3 + 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$(115; 50) = 5 \mid 1100$, tehát az egyenlet megoldható és végtelen sok megoldása van.
Elegendő a $23x + 10y = 220$ egyenlettel foglalkoznunk (ahol $(23; 10) = 1 \mid 220$), hiszen 5-tel egyszerűsíthetjük az eredeti egyenletet.
Fejezzük ki az egyenletből azt az ismeretlent, amelyiknek az együtthatója a kisebb abszolút értékű szám (jelen esetben ez az y), és a törtből válasszuk le azokat a részeket, amelyek biztosan egész értékűek.

$$y = \tfrac{220-23x}{10} = \tfrac{220-20x-3x}{10} = 22 - 2x - \underbrace{\frac{3}{10}x}_{=\mathrm{u}}$$

$$y = 22 - 2x - u$$

Mivel $y \in \mathbb{Z}$, ezért a $10 \mid -3x \Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z}$, hogy $10u = -3x$. Mivel az egyenletben már nem szerepel tört, így „visszafordulunk”, és u-t felhasználva rendre kifejezzük x-et és y-t:

$$x = -\frac{10}{3}u, \tag{2.5}$$

$$y = 22 - 2(-\frac{10}{3}u) - u = 22 + \frac{20}{3}u - u = 22 + \frac{17}{3}u. \tag{2.6}$$

Az x-re és y-ra kapott megoldások szolgáltatják a $23x + 10y = 220$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, ahol $u \in \mathbb{Z}$. Csak az a megoldás elfogadható, amikor $x, y \geq 0$. Az $-\frac{10}{3}u \geq 0$ $(u \leq 0)$ és $22 + \frac{17}{3}u \geq 0$ $(u \geq -\frac{66}{17})$ egyenlőtlenségrendszer egyetlen közös egész megoldása: $u = 0$, melyből következik az egyetlen megoldás: $x = 0$ és $y = 22$.

Webalkalmazásunk[2] az összes megoldást adja meg, de $t = 66$ helyettesítéssel adódik feladatunk helyes eredménye. Írjuk be x és y együtthatóit, valamint a konstanst, ezután pedig kattintsunk a „Számolás” feliratú nyomógombra.



1.6. kép. A $115x + 50y = 1100$ egyenlet összes megoldása

Az 1.7 feladat megoldása.
A feladat szövege alapján a

$$14x + 22y = 236 \tag{2.7}$$

egyenletet kell megoldanunk, amely csak akkor oldható meg, ha $(14; 22) \mid 236$. Alkalmazva az Euklideszi algoritmust kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 22 &= 14 \cdot 1 + 8 \\ 14 &= 8 \cdot 1 + 6 \\ 8 &= 6 \cdot 1 + 2 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$(14; 22) = 2 \mid 236$, tehát az egyenlet megoldható és végtelen sok megoldása van. Fejezzük ki az egyenletből azt az ismeretlent, amelyiknek az együtthatója a kisebb abszolút értékű szám (jelen esetben ez az x), és a törtből válasszuk le azokat a részeket,

[2] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/ketvaltozos-linearis-diofantoszi-egyenlet/index.html

amelyek biztosan egész értékűek.

$$14x = 236 - 22y \tag{2.9}$$

$$x = \tfrac{236-22y}{14} = \tfrac{224-14y+12-8y}{14} = 16 - y + \underbrace{\frac{12-8y}{14}}_{=\mathrm{u}}$$

$$x = 16 - y + u$$

Mivel $x \in \mathbb{Z}$, ezért a $14 \mid 12 - 8y \Rightarrow \exists u \in \mathbb{Z}$, hogy $14u = 12 - 8y$. Ez egy hasonló diofantoszi egyenlet, mint az eredeti, csak itt y együtthatójának kisebb az abszolút értéke. Ismételjük meg az előző eljárást az alábbi egyenletre:

$$8y = 12 - 14u = 8 - 8u + 4 - 6u$$
$$y = 1 - u + \underbrace{\frac{4-6u}{8}}_{=\mathrm{v}}$$
$$y = 1 - u + v$$

Mivel $y \in \mathbb{Z}$, ezért a $8 \mid 4 - 6u \Rightarrow \exists v \in \mathbb{Z}$, hogy $8v = 4 - 6u$.

$$6u = 4 - 8v = 4 - 2v - 6v$$
$$u = \underbrace{\frac{4-2v}{6}}_{=\mathrm{t}} - v = t - v$$

Mivel $u \in \mathbb{Z}$, ezért a $6 \mid 4 - 2v \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}$, hogy $6t = 4 - 2v$. Ismételjük az eljárást:

$$2v = 4 - 6t$$
$$v = 2 - 3t.$$

Mivel az egyenletben már nem szerepel tört, így „visszafordulunk”, és a t paraméter felhasználásával rendre kifejezzük u-t, y-t és x-et:

$$u = t - v = t - (2 - 3t) = t - 2 + 3t = 4t - 2, \tag{2.10}$$
$$y = 1 - u + v = 1 - (4t - 2) + 2 - 3t = 5 - 7t, \tag{2.11}$$
$$x = 16 - y + u = 16 - 5 + 7t + 4t - 2 = 9 + 11t. \tag{2.12}$$

Az x-re és y-ra kapott megoldások szolgáltatják a $14x + 22y = 236$ diofantoszi egyenlet összes megoldását, ahol a t paraméter tetszőleges egész szám. Csak az a megoldás elfogadható, amikor x és y is nemnegatív. Az $5 - 7t \geq 0$ és $9 + 11t \geq 0$ egyenlőtlenségek alkotta rendszer egyetlen közös egész megoldása: $t = 0$. Ez alapján tudjuk, hogy $x = 9$ és $y = 5$, vagyis 9 darab 14-fejű és 5 darab 22-fejű hidra, azaz 14 hidra él a szigeten. Webalkalmazásunkban az összes megoldás képletéből $t = 33$ helyettesítéssel adódik feladatunk helyes megoldása.



1.7. kép. A $14x + 22y = 236$ egyenlet összes megoldása

Az 1.8 feladat megoldása.

Az előző 2 feladat megoldásában az együtthatók abszolút értékének csökkentéses módszerét használtuk fel, most viszont a webalkalmazás által is használt módszerrel fogunk dolgozni.

A feladat szövege alapján a

$$72x + 56y = 752 \tag{2.13}$$

egyenletet kell megoldanunk, amely csak akkor oldható meg, ha $(72; 56) \mid 752$.

Alkalmazva az Euklideszi algoritmust kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 72 &= 56 \cdot 1 + 16 \\ 56 &= 16 \cdot 3 + 8 \\ 16 &= 8 \cdot 2 + 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$(72; 56) = 8 \mid 752$, tehát az egyenlet megoldható és végtelen sok megoldása van.

Elegendő az $9x + 7y = 94$ egyenlettel foglalkoznunk, ahol $(9{,}7) = 1 \mid 94$.



1.8. kép. A 9 és a 7 legnagyobb közös osztójának kiszámítása

A webalkalmazás nem csak a legnagyobb közös osztót, hanem a lineáris kombinációs együtthatókat $(x_{lk},\, y_{lk})$ is kiszámolta: $1 = 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 9 \Rightarrow x_{lk} = -3,\ y_{lk} = 4$. Ebből egyértelműen adódik, hogy $x_0 = (-3) \cdot 94 = -282$ és $y_0 = 4 \cdot 94 = 376$ megoldása az $9x + 7y = 94$ egyenletnek. Az összes megoldás $(t, x_t, y_t \in \mathbb{Z})$:



1.9. kép. A $9x + 7y = 94$ egyenlet összes megoldása

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + t\frac{b}{(a,b)} = (-282) + 7t \\ y_t &= y_0 - t\frac{a}{(a,b)} = 376 - 9t. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Próbálgatással, $t = 41$ helyettesítéssel, megkapjuk az egyetlen pozitív számpárt, amely kielégíti a $72x + 56y = 752$ egyenletet: $x = 5$ és $y = 7$. Tehát 5 zsák búzát és 7 zsák árpát osztottak szét.

2.1. *Megjegyzés.* Gyakorlásként oldjuk meg a feladatot az együtthatók abszolút értékének csökkentésével is!

Az 1.9 feladat megoldása.

A feladat szövege alapján a

$$4x + 2y = 302 \tag{2.16}$$

egyenletet kell megoldanunk, amely csak akkor oldható meg, ha $(4; 2) \mid 302$.

Most nincs szükség az Euklideszi algoritmus alkalmazására, hiszen fejből is tudjuk, hogy $(4; 2) = 2 \mid 302$, tehát az egyenlet megoldható és végtelen sok megoldása van.

A 2-vel való egyszerűsíthetőség miatt elegendő az $2x + y = 252$ egyenlettel foglalkoznunk, ahol $(2{,}1) = 1 \mid 151$.

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \Rightarrow x_{lk} = 0,\ y_{lk} = 1$. Ebből egyértelműen adódik, hogy $x_0 = 0 \cdot 151 = 0$ és $y_0 = 1 \cdot 151 = 151$ megoldása az $2x + y = 151$ egyenletnek.

Az összes megoldás $(t, x_t, y_t \in \mathbb{Z})$:



1.10. kép. A $2x + y = 151$ egyenlet összes megoldása

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + t\frac{b}{(a,b)} = 0 + 1t \\ y_t &= y_0 - t\frac{a}{(a,b)} = 151 - 2t. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Próbálgatással, $t = 75$ helyettesítéssel, megkapjuk az egyetlen pozitív számpárt, amely

kielégíti a $4x + 2y = 302$ egyenletet: $x = 75$ és $y = 1$. Tehát 75 autóval és 2 motorral (valószínűleg Arthur és Merlin) hagyta el Kamelotot.

2.2. *Megjegyzés.* Gyakorlásként oldjuk meg a feladatot az együtthatók abszolút értékének csökkentésével is!

Az 1.10 feladat megoldása.

A feladat szövege alapján a

$$120x + 180y = 1860 \tag{2.18}$$

egyenletet kell megoldanunk, amely csak akkor oldható meg, ha $(120; 180) \mid 1860$. Alkalmazva az Euklideszi algoritmust kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 180 &= 120 \cdot 1 + 60 \\ 120 &= 60 \cdot 2 + 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$(120; 180) = 60 \mid 1860$, tehát az egyenlet megoldható és végtelen sok megoldása van. A 60-nal való egyszerűsíthetőség miatt elegendő a $2x + 3y = 31$ egyenlettel foglalkoznunk, ahol $(2{,}3) = 1 \mid 31$.

$1 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \Rightarrow x_{lk} = -1,\ y_{lk} = 1$. Ebből egyértelműen adódik, hogy az $x_0 = -1 \cdot 31 = -31$ és az $y_0 = 1 \cdot 31 = 31$ megoldása az $2x + 3y = 31$ egyenletnek.

Az összes megoldás $(t, x_t, y_t \in \mathbb{Z})$:



1.11. kép. A $2x + 3y = 31$ egyenlet összes megoldása

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + t\frac{b}{(a,b)} = -31 + 3t \\ y_t &= y_0 - t\frac{a}{(a,b)} = 31 - 2t. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Próbálgatással, $t = 15$ helyettesítéssel, megkapjuk az egyetlen pozitív számpárt, amely kielégíti a $2x + 3y = 31$ egyenletet: $x = 14$ és $y = 1$. Tehát 14 darab 120 literes és 1 darab 180 literes hordó van a királyi pincében.

2.3. *Megjegyzés.* Gyakorlásként oldjuk meg a feladatot az együtthatók abszolút értékének csökkentésével is!

2.3. Az 1.3 témakör feladatainak megoldása

Az 1.11 feladat megoldása.
A webalkalmazásunk[3] „Képlet” szekciójában lévő azonosságok révén a megoldandó egyenlet (először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $y = 12$):

$$\begin{aligned} 12 = u^2 - v^2 \ (u, v \in \mathbb{Z}^+;\ u > v), \\ 12 = (u + v)(u - v), \end{aligned} \tag{2.21}$$

vagyis a 12 osztópárjai között kell keresni a megoldásokat.
$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1$. Az $u > v$ feltétel miatt csak a $(4; 3)$, $(6; 2)$, $(12; 1)$ számpárok jöhetnek szóba.
Nézzük az első osztópárt: $u + v = 4$ és $u - v = 3$ esetén $u = 3 + v$ helyettesítéssel $v = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$, tehát ez nem ad megoldást.
$u + v = 6$ és $u - v = 2$ esetén $u = 2 + v$ helyettesítéssel $v = 2,\ u = 4$, tehát a második osztópár helyes megoldást ad. Ekkor a keresett Pitagoraszi számhármas:

$$x = 2uv = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16,\ y = 12,\ z = u^2 + v^2 = 4^2 + 2^2 = 20. \tag{2.22}$$

Vegyük észre, hogy megoldást pontosan akkor kapunk, ha az osztópárok mindegyik tagja vagy páros, vagy páratlan, hiszen különbségük csak így lesz 2-vel osztható. Ezeket figyelembe véve, $y = 12$ esetén, ez az egyetlen megoldás.
$x = 12$ esetén $12 = 2uv$, vagyis $6 = uv$, amelyet csak a $(3; 2)$ és a $(6; 1)$ számpárok elégítenek ki.
Az első számpár esetében $u = 3,\ v = 2$, vagyis

$$x = 12,\ y = u^2 - v^2 = 9 - 4 = 5,\ z = u^2 + v^2 = 9 + 4 = 13. \tag{2.23}$$

A második számpár esetében $u = 6,\ v = 1$, vagyis

$$x = 12,\ y = u^2 - v^2 = 36 - 1 = 35,\ z = u^2 + v^2 = 36 + 1 = 37. \tag{2.24}$$

[3] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/pitagoraszi-szamharmasok/index.html

Tehát 3 olyan derékszögű háromszöget találtunk, amelynek egyik befogója 12 és kielégíti a Pitagoraszi számhármasokra vonatkozó azonosságokat.
Nézzük meg ellenőrzésképpen a webalkalmazásunkban, hogy az általunk kiszámolt 3 Pitagoraszi számhármas tényleg helyes-e. Láthatjuk, hogy jól dolgoztunk, ugyanakkor vegyük észre, hogy létezik még egy olyan Pitagoraszi számhármas, a $(9; 12; 15)$, melyben az egyik befogó 12 cm. Ez az $u, v \in \mathbb{Z}^+$ kezdeti feltételünk miatt nem szerepel a megoldásaink között, hiszen $2uv = 9$ esetén $uv = 4{,}5$, ami csak úgy lehetséges ha $u, v \in \mathbb{Q}$.

Az 1.12 feladat megoldása.

A feladat szövege alapján az

$$\begin{aligned} \frac{xy}{2} &= 60 \\ xy = 120 \ (x^2 + y^2 &= z^2) \end{aligned} \tag{2.25}$$

egyenlettel kell foglalkoznunk, ezen belül is azt kell megvizsgálnunk, hogy a 120 hányféleképpen áll elő 2 szám szorzataként úgy, hogy azok négyzetösszegei is négyzetszámot eredményeznek.
$120 = 1 \cdot 120 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40 = 4 \cdot 30 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$. Webalkalmazásunk segítségével megállapíthatjuk, hogy csak $x = 8$ és $y = 15$ esetén lesz $x^2 + y^2$ négyzetszám. Ellenőrzésképpen oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2uv &= 8 \\ u^2 - v^2 &= 15. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Az első egyenletből $u = \frac{4}{v}$ adódik, melyet behelyettesítve a második egyenletbe a $v^4 + 15v^2 - 16 = 0$ negyedfokú egyenlethez jutunk, amit $v^2 = a$ helyettesítéssel $a^2 + {} + 15a - 16 = 0$ alakba írhatunk át. Vegyük észre, hogy az előző alakkal egyenértékű az $(a - 1)(a + 16) = 0$ alak, melynek megoldásai: $a_1 = 1$ és $a_2 = -16$.
Mivel csak nemnegatív számból tudunk négyzetgyököt vonni, így csak az $a = 1$ megoldás jöhet szóba, melyet visszahelyettesítve a $v^2 = a$ egyenletbe kapjuk, hogy $v = 1$, ebből pedig következik, hogy $u = 4$. A keresett Pitagoraszi számhármas tehát:

$$x = 2uv = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8, \ y = u^2 - v^2 = 4^2 - 1^2 = 15, \ z = u^2 + v^2 = 17. \tag{2.27}$$

Ez pedig megegyezik a webalkalmazásunkból kiolvasott megoldással.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	17	144	145	28	96	100	42	56	70	60	80	100	84	112	140
5	12	13	18	24	30	30	40	50	42	144	150	60	91	109	84	135	159
6	8	10	18	80	82	30	72	78	44	117	125	60	144	156	85	132	157
7	24	25	20	21	29	32	60	68	45	60	75	63	84	105	87	116	145
8	15	17	20	48	52	32	126	130	45	108	117	64	120	136	88	105	137
9	12	15	20	99	101	33	44	55	48	55	73	65	72	97	90	120	150
9	40	41	21	28	35	33	56	65	48	64	80	65	156	169	93	124	155
10	24	26	21	72	75	35	84	91	48	90	102	66	88	110	96	110	146
11	60	61	22	120	122	35	120	125	48	140	148	66	112	130	96	128	160
12	16	20	24	32	40	36	48	60	50	120	130	69	92	115	99	132	165
12	35	37	24	45	51	36	77	85	51	68	85	72	96	120	100	105	145
13	84	85	24	70	74	36	105	111	51	140	149	72	135	153	102	136	170
14	48	50	24	143	145	36	160	164	54	72	90	72	154	170	119	120	169
15	20	25	25	60	65	39	52	65	55	132	143	75	100	125			
15	36	39	26	168	170	39	80	89	56	90	106	78	104	130			
15	112	113	27	36	45	40	42	58	56	105	119	80	84	116			
16	30	34	27	120	123	40	75	85	57	76	95	80	150	170			
16	63	65	28	45	53	40	96	104	60	63	87	81	108	135			

1.12. kép. A 2.25 egyenletet kielégítő számhármas

Az 1.13 feladat megoldása.

Jelöljük a szélességet $4x$-szel, a magasságot pedig $3x$-szel (ezek lesznek a derékszögű háromszög befogói). Ekkor

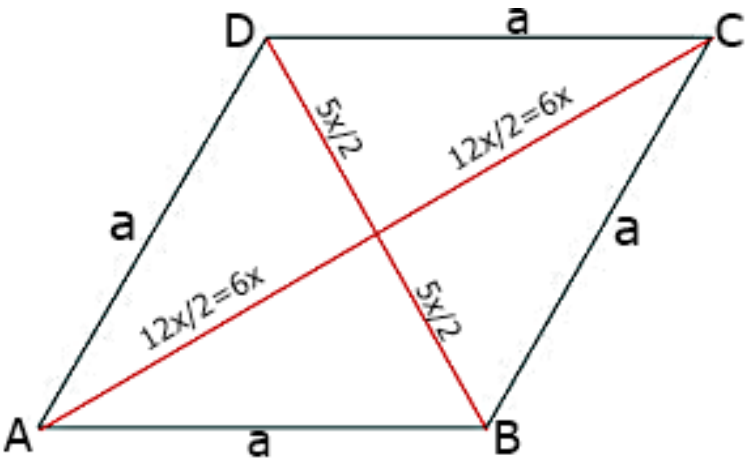
$$\begin{aligned} (4x)^2 + (3x)^2 &= 55^2 \\ 16x^2 + 9x^2 &= 3025 \\ 25x^2 &= 3025 \\ x^2 &= 121 \\ x &= 11 \end{aligned} \tag{2.28}$$

adódik, amelyből következik, hogy a képernyő $a = 44\ cm$ széles és $b = 33\ cm$ magas. Ez az eredmény a webalkalmazásunkból is kiolvasható.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	17	144	145	28	96	100	42	56	70	60	80	100	84	112	140
5	12	13	18	24	30	30	40	50	42	144	150	60	91	109	84	135	159
6	8	10	18	80	82	30	72	78	44	117	125	60	144	156	85	132	157
7	24	25	20	21	29	32	60	68	45	60	75	63	84	105	87	116	145
8	15	17	20	48	52	32	126	130	45	108	117	64	120	136	88	105	137
9	12	15	20	99	101	33	44	55	48	55	73	65	72	97	90	120	150
9	40	41	21	28	35	33	56	65	48	64	80	65	156	169	93	124	155
10	24	26	21	72	75	35	84	91	48	90	102	66	88	110	96	110	146
11	60	61	22	120	122	35	120	125	48	140	148	66	112	130	96	128	160
12	16	20	24	32	40	36	48	60	50	120	130	69	92	115	99	132	165
12	35	37	24	45	51	36	77	85	51	68	85	72	96	120	100	105	145
13	84	85	24	70	74	36	105	111	51	140	149	72	135	153	102	136	170
14	48	50	24	143	145	36	160	164	54	72	90	72	154	170	119	120	169
15	20	25	25	60	65	39	52	65	55	132	143	75	100	125			
15	36	39	26	168	170	39	80	89	56	90	106	78	104	130			
15	112	113	27	36	45	40	42	58	56	105	119	80	84	116			
16	30	34	27	120	123	40	75	85	57	76	95	80	150	170			
16	63	65	28	45	53	40	96	104	60	63	87	81	108	135			

1.13. kép. A (33;44;55) pitagoraszi számhármas

Az 1.14 feladat megoldása.



1.2. ábra. Az 1.14 feladatban szereplő rombusz

$K_{rombusz} = 156\ cm \Longrightarrow a = 39\ cm$. Az átlókat jelölje $5x$ és $12x$. A rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást, ezért a keletkezett 4 darab háromszög bármelyikére felírható ugyanaz az egyenlet:

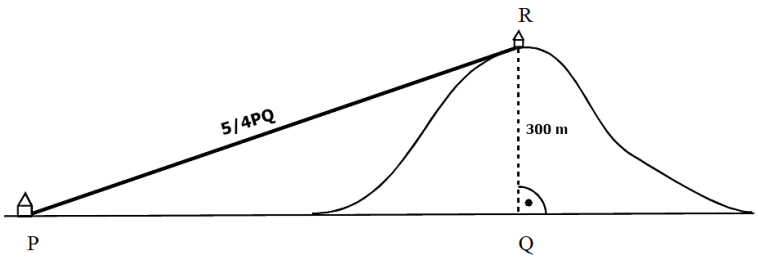
$$\begin{aligned} \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{12x}{2}\right)^2 &= 39^2 \\ \frac{25x^2}{4} + 36x^2 &= 1521 \\ 25x^2 + 144x^2 &= 6084 \\ 169x^2 &= 6084 \\ x^2 &= 36 \\ x &= 6. \end{aligned} \tag{2.29}$$

A rombusz átlói tehát $5x = 30\ cm$ és $12x = 72\ cm$ hosszúak, területe pedig $T = \frac{e \cdot f}{2} = = 1080\ cm^2$. A feladatunkhoz kapcsolódó Pitagoraszi számhármas pedig: $a = 15,\ b = = 36,\ c = 39$, melyet leellenőrizhetünk a webalkalmazásunkban is.

a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	17	144	145	28	96	100	42	56	70	60	80	100	84	112	140
5	12	13	18	24	30	30	40	50	42	144	150	60	91	109	84	135	159
6	8	10	18	80	82	30	72	78	44	117	125	60	144	156	85	132	157
7	24	25	20	21	29	32	60	68	45	60	75	63	84	105	87	116	145
8	15	17	20	48	52	32	126	130	45	108	117	64	120	136	88	105	137
9	12	15	20	99	101	33	44	55	48	55	73	65	72	97	90	120	150
9	40	41	21	28	35	33	56	65	48	64	80	65	156	169	93	124	155
10	24	26	21	72	75	35	84	91	48	90	102	66	88	110	96	110	146
11	60	61	22	120	122	35	120	125	48	140	148	66	112	130	96	128	160
12	16	20	24	32	40	36	48	60	50	120	130	69	92	115	99	132	165
12	35	37	24	45	51	36	77	85	51	68	85	72	96	120	100	105	145
13	84	85	24	70	74	36	105	111	51	140	149	72	135	153	102	136	170
14	48	50	24	143	145	36	160	164	54	72	90	72	154	170	119	120	169
15	20	25	25	60	65	39	52	65	55	132	143	75	100	125			
15	36	39	26	168	170	39	80	89	56	90	106	78	104	130			
15	112	113	27	36	45	40	42	58	56	105	119	80	84	116			
16	30	34	27	120	123	40	75	85	57	76	95	80	150	170			
16	63	65	28	45	53	40	96	104	60	63	87	81	108	135			

1.14. kép. A (15;36;39) pitagoraszi számhármas

Az 1.15 feladat megoldása.

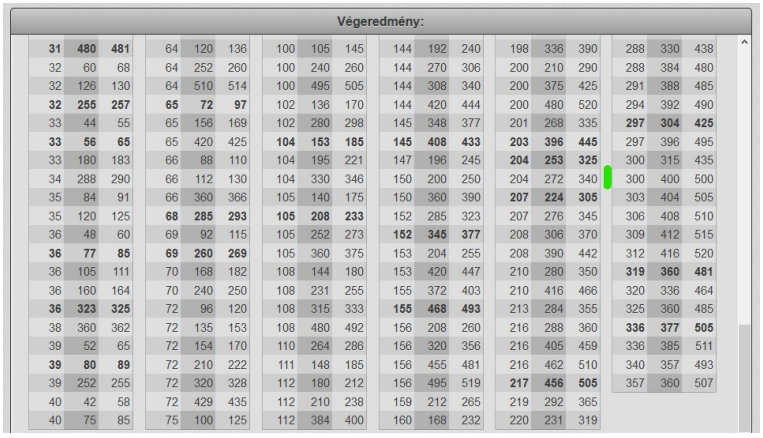


1.3. ábra. Az 1.15 feladatban szereplő felvonó

A PQR derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt

$$\begin{aligned}(PQ)^2 + 300^2 &= \left(\frac{5}{4}PQ\right)^2 \\ (PQ)^2 + 90000 &= \frac{25}{16}(PQ)^2 \\ 90000 &= \frac{9}{16}(PQ)^2 \\ 160000 &= (PQ)^2 \\ 400 &= PQ\end{aligned} \tag{2.30}$$

adódik, tehát a felvonó drótkötele az alábbi Pitagoraszi számhármas harmadik tagja, vagyis 500 m hosszú.



1.15. kép. A (300;400;500) pitagoraszi számhármas

2.4. Az 1.4 témakör feladatainak megoldása

Az 1.16 feladat megoldása.

A p prímszámoknak pontosan két pozitív osztójuk van: 1 és p. A p prímek négyzetének, p^2-nek pontosan három pozitív osztójuk van: 1, p és p^2.

Ezek miatt $n = p$ és $n + 1 = q^2$, ahol p és q prímszámok.

Az n és $n + 1$ számok egyike páros, azaz p és q^2, és így p és q egyike páros. Egyetlen páros prím van, ez a 2.

Ha $p = 2$, akkor $n = 2$ és $n + 1 = 3$, ám nincs olyan q prímszám, amelyre $3 = q^2$.
Ha $q = 2$, akkor $q^2 = 4 = n + 1$, így $n = 3$, azaz $p = 3$. Ez megoldás, méghozzá az egyetlen.
Tehát $n + 2012 = 3 + 2012 = 2015$, melynek prímtényezős felbontása: $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.



1.16. kép. A 2015 prímtényezős felbontása

A 2015 osztóinak száma: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, amit a webalkalmazásunk[4] is megerősít.



1.17. kép. A 2015 összes osztója

Az 1.17 feladat megoldása.
A keresett szám prímtényezős alakja: $n = p^a \cdot q^b$. Az osztók száma 6, tehát $(a+1)(b+$ $+1) = 6$, így az a és b kitevők 1 és 2, vagyis $n = p^2 \cdot q$.
n osztói: 1, p, p^2, q, pq, p^2q. n osztóinak összege: $(1 + p + p^2)(1 + q) = 28$.
$1 + p + p^2$ értéke $p = 2$ esetén 7, $p = 3$-ra 13 és $p = 5$-re már 31, ez nagyobb 28-nál, így

[4] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/osztok-meghatarozasa/index.html

nem lehet osztója 28-nak. Csak $p = 2$ lehet a megoldás, ekkor $(1+2+2^2)(1+q) = 28$, amiből $q = 3$ adódik. A keresett szám: $n = 2^2 \cdot 3 = 12$, amelynek valóban 6 osztója van, amit a webalkalmazásunk[5] is megerősít.



1.18. kép. A 12 összes osztója

Az 1.18 feladat megoldása.

Legyen n a keresett szám. A négy osztó között van az 1 és az n, a másik két osztó a és b, $1 < a < b < n$, ahol $a = p$, $b = p^2$ és p prímszám, vagy a és b különböző prímek.

Ha $a = p$ és $b = p^2$ (p prímszám), akkor $1 + p + p^2 + p^3 = 84$. Ellenőrzés mutatja, hogy ennek az egyenletnek nincs megoldása a prímek körében. $p = 2$ vagy $p = 3$ esetén a bal oldali összeg kisebb 84-nél, míg $p = 5$-re és nagyobb prímekre az összeg nagyobb 84-nél.

Ha a és b különböző prímek, akkor $1 + a + b + n = 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) = 84$. Ezek szerint a 84-et kell két egész szám szorzataként felírni.

A lehetséges szorzatok (az osztópárok alapján): $84 = 2 \cdot 42 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = = 7 \cdot 12$, és az innen adódó a és b értékek csak egy esetben lesznek prímek, ezek $a = 5$ és $b = 13$. Tehát egy ilyen szám van, az $n = 5 \cdot 13 = 65$, amelynek valóban 4 pozitív osztója van (ezt a webalkalmazásunk is megerősíti) és az osztók összege 84.

[5] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/osztok-meghatarozasa/index.html



1.18. kép. A 65 összes osztója

Az 1.19 feladat megoldása.

Egy számnak akkor lehet 25 osztója, ha p^24 vagy $p^4 \cdot q^4$ alakú (p és q prímek). 2^24 illetve $2^4 \cdot 3^4$ nagyobb, mint 999, ezért nincs ilyen háromjegyű természetes szám.

Az 1.20 feladat megoldása.

Mivel $p^2 + 11 = (p+1)(p-1) + 12$, így ha $p \geq 5$, akkor az összeg nagyobb, mint 12 és mindkét tag osztható 12-vel, mert $(p+1)(p-1)$ mindkét tényezője páros és az egyik biztosan osztható 3-mal. Így 6-nál több pozitív osztója van, mert 12-nek pontosan 6 osztója van. Így csak $p = 2$ és $p = 3$ lehetséges.

Ha $p = 2$, akkor a $p^2 + 11 = 15$, ennek 4 osztója van, míg ha $p = 3$, akkor $p^2 + 11 = 20$, és ennek pontosan 6 osztója van, amit a webalkalmazásunk is megerősít.



1.19. kép. A 20 összes osztója

2.5. Az 1.5 témakör feladatainak megoldása

Az 1.21 feladat megoldása.

Ha a $p = 2^k - 1$ szám prímszám, akkor az $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ szám osztói:
1, 2, 4, ... , 2^{k-1}, és p, $2p$, $4p$, ... , $2^{k-1}p$.
Számoljuk az osztók összegét: $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, illetve
$p + 2p + 4p + \ldots + 2^{k-1}p = (2^k - 1)p$, így az osztók összege:

$$2^k - 1 + (2^k - 1)p = (2^k - 1)(1 + p) = (2^k - 1)2^k = 2n \tag{2.31}$$

Beláttuk, ha $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám, akkor az n szám tökéletes. (q.e.d.)

Az 1.22 feladat megoldása.

Egy négyzetszám osztóinak összege páratlan. Mivel egy tökéletes szám osztóinak összege a szám kétszerese, azaz páros szám, így egy négyzetszám nem lehet tökéletes.

Az 1.23 feladat megoldása.

Belátjuk, hogy egy ilyen szám van, a 6. Ha a p prím osztója n-nek, és x olyan osztója n-nek, amely nem osztható p-vel, akkor az osztókat párokba rendezhetjük: (x, px), (p^2x, p^3x), ... , $(p^{2k}x, p^{2k+1}x)$.
Tehát az osztók összege osztható $(p + 1)$-gyel, hiszen ez teljesül minden párban a két osztó összegére.
Válasszuk p-nek az n legkisebb prímosztóját, így a $p + 1|2n$ oszthatóságból következtethetünk arra, hogy $p = 2$. Ekkor 3 is osztója n-nek, tehát $n = 6k$.
Ha $k > 1$, akkor az $n = 6k$ számnak különböző osztói 1, k, $2k$, $3k$, $6k$ (használtuk a $k > 1$ feltételt), ezek összege $12k + 1 > 2n$, tehát n nem tökéletes.
Egy lehetőségünk maradt: $k = 1$, ekkor $n = 6$ tökéletes.

Az 1.24 feladat megoldása.

Ha az n tökéletes szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, akkor ha d osztója az n számnak és d nem osztható 3-mal, akkor $3d$ is osztója n-nek. Így n osztói (d,$3d$) párokba rendezhetők, és $d + 3d = 4d$ osztható 4-gyel, tehát n osztóinak összege osztható 4-gyel. Az osztók összege $2n$ (hiszen n tökéletes szám), ez osztható 4-gyel, így n páros szám.
Az n páros szám osztható 3-mal, $n = 6k$ alakú, és 6-nál nagyobb, ezért $k > 1$. Az n osztói között vannak a $6k$, $3k$, $2k$, k, 1 számok, ám már ezek összege is $12k + 1 = 2n + + 1 > 2n$, tehát az n nem lehet tökéletes szám.

Az 1.25 feladat megoldása.

Az $n = p \cdot q \cdot \ldots \cdot r$ szám osztóinak összege a szám kétszerese, azaz

$$(p + 1)(q + 1) \ldots (r + 1) = 2pq \ldots r \tag{2.32}$$

A bal oldalon mindegyik zárójeles tényező páros, míg a jobb oldal osztható 2-vel, ám 4-gyel nem, ezért a bal oldalon csak egy tényező lehet: $p+1=2p$ jöhet szóba. Ez nem ad megoldást.

2.6. Az 1.6 témakör feladatainak megoldása

Az 1.26 feladat megoldása.
Az N szám prímtényezős alakja: $N=2^a\cdot 3^b$. Az osztók számára fennálló feltétel szerint

$$\begin{aligned}(a+1)(b+1)&=\frac{(2a+1)(2b+1)}{3}\\ 3ab+3a+3b+3&=4ab+2a+2b+1\\ ab-a-b-2&=0\end{aligned}\tag{2.33}$$

Keressük a 2.33 egyenlet megoldásait a pozitív egészek körében. Ha lehet, érdemes az összeget szorzattá alakítani.

$$\begin{aligned}ab-a-b-2&=0\\ ab-a-b+1&=3\\ (a-1)(b-1)&=3\end{aligned}\tag{2.34}$$

Ha $a\geq 1$ és $b\geq 1$, akkor két lehetőség van: $1\cdot 3=3$ és $3\cdot 1=3$, így a megoldások $a=2$, $b=4$ és $a=4$, $b=2$.
Két olyan N szám van, amely megoldása a feladatnak: $N=2^2\cdot 3^4=324$ és $N=$ $=2^4\cdot 3^2=144$, osztóik száma $(2+1)(4+1)=(4+1)(2+1)=15$. N^2-re pedig $144^2=20736=2^8\cdot 3^4$ és $324^2=104976=2^4\cdot 3^8$, osztóik száma $(8+1)(4+1)=$ $=(4+1)(8+1)=45$, ami N osztóinak háromszorosa. Ezt a webalkalmazásunk[6] is megerősíti.

[6] https://negyesipeter.hu/webalkalmazas/primtenyezos-felbontas/index.html



1.20. kép. A 20736 prímtényezős felbontása



1.21. kép. A 104976 prímtényezős felbontása

Az 1.27 feladat megoldása.

A téglatest élei a, b és c. A feltétel szerint $abc+ab+bc+ca+a+b+c=2000$. Ennek az egyenletnek a megoldásait keressük a pozitív egészek körében. Ha lehet, érdemes az összeget szorzattá alakítani.

Növeljük meg mindkét oldalt 1-gyel:

$$\begin{aligned} abc+ab+bc+ca+a+b+c+1 &= 2001 \\ (a+1)(b+1)(c+1) &= 2001 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$2001 = 3\cdot 23\cdot 29$ (amit a webalkalmazásunk is alátámaszt), és mindhárom tényező prímszám. Ezért az élek hosszai, azaz a, b és c értékei csak 2, 22 és 28 lehetnek (valamilyen sorrendben).



1.22. kép. A 2001 prímtényezős felbontása

Az 1.28 feladat megoldása. A feladat megoldása azonos az előzővel, csak 2000 helyett 2014-gyel számolunk.

Ha a téglatest élei a, b és c, akkor – az előző megoldás alapján – $(a+1)(b+1)(c+1) =$ $= 2015$.

Mivel $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ és mindhárom tényező prímszám, így az élek hosszai csak 4, 12 és 30 lehetnek (valamilyen sorrendben).



1.23. kép. A 2015 prímtényezős felbontása

Az 1.29 feladat megoldása.

Bontsuk fel az 1400-at prímtényezők szorzatára (ellenőrzéshez használjuk a webalkalmazásunkat): $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Mivel a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden előforduló prím kitevője páros, ezért a megoldás: $2 \cdot 7 = 14$, vagyis $1400 \cdot 14 = 19600 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ és $\sqrt{19600} =$ $= 140$.



1.24. kép. Az 1400 prímtényezős felbontása

Az 1.30 feladat megoldása.

A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden előforduló prím kitevője páros, a köbszámok esetén pedig minden kitevő osztható 3-mal.

Mivel $10 = 2 \cdot 5$ és $6 = 2 \cdot 3$, így elegendő, a 2, 3 és 5 prímtényezőket felhasználni. Tudjuk, hogy:

- a 2 kitevője páratlan és 3-mal osztva 2-t ad maradékul,
- a 3 kitevője páros és 3-mal osztva 2-t ad maradékul,
- az 5 kitevője pedig páratlan és 3-mal osztható.

Ezek alapján a megoldás: $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 36000$, hiszen $\sqrt{36000 \cdot 10} = 600$ és $\sqrt[3]{36000 \cdot 6} = 60$.

Irodalomjegyzék

[1] Baillif, Jean-Claude 1989. *Logikai sziporkák*. Gondolat Könyvkiadó. Budapest.

[2] Erdős Pál - Surányi János 2004. *Válogatott fejezetek a számelméletből*. Polygon Kiadó. Szeged.

[3] Freud Róbert - Gyarmati Edit 2000. *Számelmélet*. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest.

[4] Kiss Péter - Mátyás Ferenc 2005. *A számelmélet elemei*. EKF Líceum Kiadó. Eger.

[5] Sárközy András 1976. *Számelmélet - Példatár*. Műszaki Könyvkiadó. Budapest.

[6] Sárközy András - Surányi János 1973. *Számelmélet - Feladatgyűjtemény*. Tankönyvkiadó Vállalat. Budapest.

[7] https://www.scribd.com/document/379396531/matematika-tantargypedagogia (2019. november 24.)

[8] https://docplayer.hu/421254-0644-modul-szamelmelet-kozos-osztok-kozos-tobbszorosok-keszitette-pinter-klara.html (2019. november 24.)

[9] https://docplayer.hu/56854-Szamelmelet-feladatsor.html (2019. november 24.)

[10] http://docplayer.hu/33424790-Vi-8-pio-ragaszt-a-feladatsor-jellemzoi.html (2019. november 24.)

[11] http://www.bolyai.hu/RLV2019/Roka%20Sandor.pdf (2019. november 24.)